2014年南宁市高中毕业班第二次适应性测试
理科数学参考答案

1. C　2. A　3. B　4. A　5. B　6. C　7. A　8. C

9. B 提示：（1）一个班接收2名，另两个班各接收1名的分配方案有：$C_4^2 A_4^3$=36种；（2）一个班不接收，另两个班各接收2名的分配方案有：$C_3^1 A_4^2$=18种.则不同的分配方案为36+18=54种.

10. A　11. D

12. D 提示：可设$f(x)-2^x=c$，其中c为常数，则$f(c)=3$.

$\therefore f(x)=2^x+c$.不妨设$x=c$，则$f(c)=2^c+c$，即$2^c+c-3=0$.易得$y=2^c$与$y=3-c$至多只有一个交点，则$c=1$，$\therefore f(x)=2^x+1$，$\therefore f(3)=9$.

13. $\frac{1}{12}$　14. 27　15. 3　16. $\frac{1}{2}$

17．解：$\because \frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$，……1分

$\therefore \sin C\cos A+\sin C\cos B=\cos C\sin A+\cos C\sin B$，

即：$\sin C\cos A-\cos C\sin A=\sin B\cos C-\cos B\sin C$，

得：$\sin(C-A)=\sin(B-C)$，……3分

则$C-A=B-C$或$C-A=\pi-(B-C)$，……4分

得$2C=A+B,$或$B-A=\pi$（舍去），$\therefore C=\frac{\pi}{3}$ ……5分

$\because c=\frac{\sqrt{3}}{2}$，　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，……6分

$\therefore a^2+b^2=\frac{3}{4}+ab$，$\because a^2+b^2\ge 2ab$，……7分

$\therefore a^2+b^2=\frac{3}{4}+ab\ge 2ab,\ ab\le\frac{3}{4}$，……8分

$\therefore \Delta ABC$面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C$ ……9分

$$=\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}ab\le\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{16},$$

$\therefore$ 当 $a=b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时 ΔABC 面积的最大值是 $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$ ……………………………………10 分

18．解：（1）记“箭手两次射中的总环数为 18 环”为事件 A.

故事件 A 的基本事件有：（10，8）、（9，9）、（8，10）共 3 种，………………3 分

故 P（A）$=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}\times 2+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{16}$ ……………………………………………6 分

（2）箭手射中总环数 ξ 应为：16，17，18，19，20，…………………………………7 分

对应的概率分别为：P（ξ=16）$=(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{4}$，…………………………………………8 分

P（ξ=17）$=2\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$ ……………………………………………………………9 分

P（ξ=18）$=(\dfrac{1}{4})^2+2\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{16}$； P（$\xi$=19）$=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times 2=\dfrac{1}{8}$ ………………10 分

P（ξ=20）$=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$ ……………………………………………………………11 分

ξ	16	17	18	19	20
P	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{5}{16}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{16}$

$E\xi=16\times\dfrac{1}{4}+17\times\dfrac{1}{4}+18\times\dfrac{5}{16}+19\times\dfrac{1}{8}+20\times\dfrac{1}{16}=\dfrac{35}{2}$ ………………………12 分

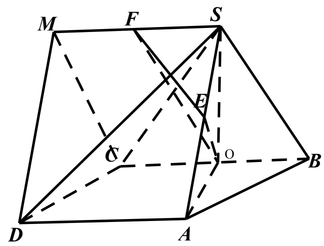
19．解：（1）作 $SO\perp BC$，垂足为 O，连结 AO ……………………………………………1 分

$\because$ 侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$，

$\therefore SO\perp$ 底面 $ABCD$ …………………………2 分

$\because SA=SB$，

$\therefore AO=BO$ ……………………………………3 分



$\because \angle ABC=45^\circ$，

$\therefore \angle AOB=90^\circ$ ……………………………………………………………………………4 分

$\because AO$ 是 SA 在底面 ABCD 内的射影，$\therefore SA\perp BC$.…………………………………6 分

（2）解法一：过点 S 作 SM∥BC 且 SM=BC，

取 SA、SM 的中点分别为 E、F，连接 OE，EF，OF：如图所示 ………………7 分

$\because$ 由（1）知△AOB 是斜边 $AB=2$ 的等腰直角三角形，

$\therefore OA=OB=\sqrt{2}$.∵Rt△SOB，SB=2，$\therefore OA=OS=\sqrt{2}$ ，∴OE⊥SA………8 分

∵由（1）得 BC⊥平面 SOA，

∴OE⊥BC，∵BC∥AD，∴OE⊥AD，　∴OE⊥平面 SAD ……………………9 分

∵SB∥OF∴∠EFO 是直线 SB 与平面 SDA 所成的角…………………………10 分

∵OBSF 为平行四边形且 SB=2，∴OF=2，∴Rt△EOF 中，OE=OA=1，

∴∠EFO=30°.∴直线 SB 与平面 SDA 所成的角的大小为30°……………………12 分

方法二：设 B 到平面 SDA 的距离为d，……………………………………………7 分

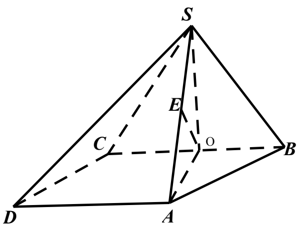
由（1）得 SO⊥平面 ABD，AD⊥SA，∵∠DAB=135°，

等腰Rt △AOB，斜边 AB=2，$\therefore OA=OB=\sqrt{2}$.

∵Rt△SOB 中，SB=2，∴　$SO=\sqrt{2}$…………………………………………………8 分

$\because V_{B-ADS}=V_{S-ADB}$，　$\therefore \frac{1}{3}\times d\times S_{\Delta ADS}=\frac{1}{3}\times SO\times S_{\Delta ADB}$，………………………9 分

$d=\frac{SO\times S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta ADS}}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\times AD\times 2\times\sin 135^{\circ}}{\frac{1}{2}\times AD\times 2}=1$………10 分



∴直线 SB 与平面 SDA 所成角　的正弦值为

$\sin\theta=\frac{d}{SB}=\frac{1}{2}$，………11 分

∴直线 SB 与平面 SDA 所成角为 30°……………………………………………………12 分

解法三：取 SA 的中点 E，连接 OE，…………………………………………………7 分

∵等腰Rt △AOB，斜边$AB=2$，$\therefore OA=OB=\sqrt{2}$.

又Rt△SOB 中，SB=2，∴$SO=\sqrt{2}$　$\therefore OA=OS=\sqrt{2}$，∴OE⊥SA ………………8 分

∵由（1）得 BC⊥平面 SOA，

∴OE⊥BC，∵BC∥AD，∴OE⊥AD，∴OE⊥平面 SAD…………………………9 分

故 OE 为点 O 到平面 SDA 的距离，OE=1.∵BC∥DA ，∴BC∥平面 SDA

∴ 点 B 到平面 SDA 的距离等于点 O 到平面 SDA 的距离 ，即 OE=1，………10 分

$\because SB=2$，∴直线 SB 与平面 SDA 所成角　的

正弦值为　$\sin\theta=\frac{OE}{SB}=\frac{1}{2}$.

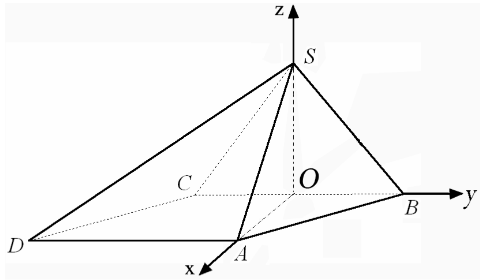
∴直线 SB 与平面 SDA 所成角为 30°………12 分

解法四：

以 OA、OB、OS 为坐标轴建立空间直角坐标系，如图，∵等腰 $Rt\triangle AOB$ 中，$AB=2$，

∴ $OA=OB=\sqrt{2}$，∴Rt△SOB 中，

SB=2，∴ $SO=\sqrt{2}$．



则 $O(0,0,0)$，$A(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，

$S(0,0,\sqrt{2})$，…………………………8 分

设 $D(\sqrt{2},t,0)$，$t\neq 0$，

则 $\overrightarrow{SB}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{SA}=(\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{DA}=(0,-t,0)$．

设平面 SDA 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，$\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{SA}=0,\\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{DA}=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2}x-\sqrt{2}z=0,\\ ty=0,\end{cases}$ 则 $y=0$，

令 $x=1$，得 $z=1$，

∴平面 SDA 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,0,1)$，……………………………………………10 分

故直线 SB 与平面 SDA 所成角　的正弦值为 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{SB},\vec{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{SB}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{SB}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$……11 分

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，∴直线 SB 与平面 SDA 所成角为 30° ……………………………12 分

20．解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2ax-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2-1}{x}$，……………………2 分

∵ $a>0$，令 $f'(x)>0$ 得：$x>\dfrac{\sqrt{2a}}{2a}$，∴函数 $f(x)$ 递增区间为 $(\dfrac{\sqrt{2a}}{2a},+\infty)$….4 分

令 $f'(x)<0$ 得：$0<x<\dfrac{\sqrt{2a}}{2a}$，∴函数 $f(x)$ 递减区间为 $(0,\dfrac{\sqrt{2a}}{2a})$ ………………6 分

（2）证明：当 $a=\dfrac{1}{8}$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{8}x^2-\ln x$，

由（1）知 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,2)$，单调递增区间为 $(2,+\infty)$，………7 分

令 $g(x)=f(x)-f(\dfrac{2}{3})$，则 $g(2)=f(2)-f(\dfrac{2}{3})=\dfrac{4}{9}-\ln 3<0$，……………9 分

$g(e^2)=\dfrac{e^4}{8}-2-\dfrac{1}{18}+\ln\dfrac{2}{3}=\dfrac{e^4}{8}+\ln 2-(\ln 3+\dfrac{37}{18})>0$，……………………11 分

又 $g(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 单调递增，∴方程 $f(x)=f(\dfrac{2}{3})$ 在区间（2，$+\infty$）上有唯一解 ……………………………………………………………………12 分

21．解：（1）设$M(x_0,\frac{x_0^2}{2p})$（$x_0>0$），$Q(a,b)$，因为$F(0,\frac{p}{2})$，由$|OQ|=|QF|$得$b=\frac{p}{4}$……1 分

又因为 Q 到抛物线 C 的准线的距离为$b+\frac{p}{2}$，所以$b+\frac{p}{2}=\frac{3}{4}$，………………2 分

从而得$\frac{p}{4}+\frac{p}{2}=\frac{3}{4}$，$p=1$，

抛物线 C 的方程：$x^2=2y$；……………………………………………………3 分

因为直线 MQ 与抛物线 C 相切于点 M，而$F(0,\frac{1}{2})$，$O(0,0)$，$M(x_0,\frac{x_0^2}{2})$，$Q(a,\frac{1}{4})$

由$|MQ|=|OQ|$，得$(x_0-a)^2+(\frac{x_0^2}{2}-\frac{1}{4})^2=a^2+\frac{1}{16}$，得$a=\frac{x_0^3}{8}+\frac{3}{8}x_0$，……………4 分

由$y=\frac{1}{2}x^2$求导得$y'=x$，从而$k=x_0=\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{x_0^2}{2}}{\frac{x_0^3}{8}-\frac{5}{8}x_0}$，……………………………5 分

则$\frac{x_0^4}{8}-\frac{5x_0^2}{8}=\frac{1}{4}-\frac{x_0^2}{2}$，即$x_0^4-x_0^2-2=0$，又$x_0>0$，解得$x_0=\sqrt{2}$，则$M(\sqrt{2},1)$…6 分

（2）因$M(\sqrt{2},1)$，$Q(\frac{5\sqrt{2}}{8},\frac{1}{4})$，将$y=kx+\frac{1}{4}$代入$x^2=2y$得$x^2-2kx-\frac{1}{2}=0$，

可得$\Delta=4k^2+2>0$，

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=2k,x_1x_2=-\frac{1}{2}$ ………………………7 分

则$|AB|^2=(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=(1+k^2)(4k^2+2)$，……………………8 分

圆$Q:(x-\frac{5\sqrt{2}}{8})^2+(y-\frac{1}{4})^2=\frac{27}{32}$，圆心 Q 到直线$l$的距离为$d=\frac{|5\sqrt{2}k|}{8\sqrt{1+k^2}}$，

则$|DE|^2=\frac{27+2k^2}{8(1+k^2)}$ ………………………………………………………9 分

$|AB|^2\times|DE|^2=\frac{1}{8}(4k^2+2)\times(27+2k^2)=k^4+14k^2+\frac{27}{4}$……………………10 分

$=(k^2+7)^2-\frac{169}{4}$，当$k=0$时……………………………………………11 分

$(|AB|^2\times|DE|^2)|_{\min}=\frac{27}{4}$，即$(|AB|\times|DE|)|_{\min}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ………………………12 分

22．解：（1）当 $n\geq 2$ 时，$S_n=na_n-\frac{n(n-1)}{2}$，$S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

可得：$a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}-(n-1)$，……………………………………………………1 分

$\therefore a_n-a_{n-1}=1(n\geq 2,n\in N^*)$，　$\because a_1=4$，

$\therefore a_n=4+(n-1)=n+3(n\in N^*)$. ……………………………………………………2 分

（2）证明：（i）当 $n=2$ 时，$b_2=b_1^2-2=14>5=a_2$，不等式成立……………………3 分

（ii）假设当 $n=k(k\geq 2,k\in N^*)$ 时，不等式成立，即 $b_k>k+3$.

那么，当 $n=k+1$ 时，

$b_{k+1}=b_k^2-(k-1)b_k-2=b_k(b_k-k+1)-2>b_k(k+3-k+1)-2=$

$4b_k-2>4(k+3)-2=4k+10>(k+1)+3$

所以当 $n=k+1$ 时，不等式也成立. ……………………………………………………4 分

根据（i）（ii）可知，$b_n>a_n(n\geq 2,n\in N^*)$. ………………………………………5 分

（3）证明：设 $f(x)=\ln(1+x)-x$，$(x>0)$ ……………………………………………6 分

$f(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，………………7 分

$\therefore f(x)<f(0)=0,\therefore \ln(1+x)<x$. ………………………………………………8 分

$\because$ 当 $n\geq 2,n\in N^*$ 时，由（2）得 $\frac{1}{b_n}<\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n+3}$，

$\therefore \ln(1+\frac{1}{b_nb_{n+1}})<\frac{1}{b_nb_{n+1}}<\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}$，…………………………9 分

$\therefore \ln(1+\frac{1}{b_2b_3})+\ln(1+\frac{1}{b_3b_4})+\ln(1+\frac{1}{b_4b_5})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{b_nb_{n+1}})$

$<\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}$ ……………………………………………10 分

$=\frac{1}{5}-\frac{1}{n+4}<\frac{1}{5}$，……………………………………………………………11 分

$\therefore (1+\frac{1}{b_2b_3})(1+\frac{1}{b_3b_4})(1+\frac{1}{b_4b_5})\cdots(1+\frac{1}{b_nb_{n+1}})<\sqrt[5]{e}(n\geq 2,n\in N^*)$ ……………12 分