合肥市2015年高三第二次教学质量检测
数学试题(理)参考答案及评分标准

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	B	C	C	D	B	D	A	B

二、填空题：

11. 2

12. $-\frac{\sqrt{3}}{3}<a<\frac{\sqrt{3}}{3}$

13. -2.

14. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15. ②③⑤.

三、解答题：

16. 解(Ⅰ)由题意知：$b\tan A+b\tan B=2c\tan B$，

$\therefore \sin B\frac{\sin A}{\cos A}+\sin B\frac{\sin B}{\cos B}=2\sin C\cdot\frac{\sin B}{\cos B}$，即 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\sin C\cos A$

$\therefore \sin C=2\sin C\cos A$，即 $\cos A=\frac{1}{2}$，

又 $0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.　　　　　　　　　　………6 分

(Ⅱ) $\vec{m}\cdot\vec{n}=\sin B\cos B+\sin C\cos C=\frac{1}{2}\sin 2B+\frac{1}{2}\sin 2C$

$$=\frac{1}{2}\sin 2B+\frac{1}{2}\sin(\frac{4\pi}{3}-2B)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2B-\frac{\pi}{6})$$

$$\because\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\0<C<\frac{\pi}{2}\\B+C=\frac{2\pi}{3}\end{cases},\therefore\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$$

$\therefore\frac{\sqrt{3}}{4}<\vec{m}\cdot\vec{n}\le\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$\vec{m}\cdot\vec{n}$的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. ………12 分

17.（Ⅰ）$P=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{101}{125}$. ………6 分

（Ⅱ）$P(\xi=10000)=\frac{1}{5}$

$P(\xi=5000)=\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{25}$

$P(\xi=2500)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{3}=\frac{36}{125}$

$P(\xi=1250)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{96}{625}$

$P(\xi=625)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times1=\frac{24}{625}$

$\therefore$ 随机变量ξ的分布列为

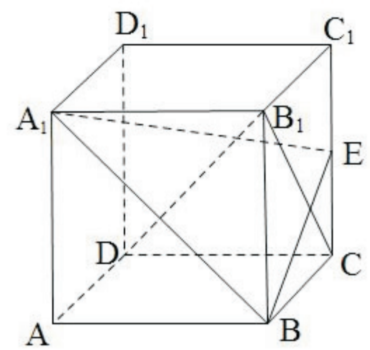
ξ	10000	5000	2500	1250	625
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{24}{625}$

所以 期望$E(\xi)=10000\times\frac{1}{5}+5000\times\frac{8}{25}+2500\times\frac{36}{125}+1250\times\frac{96}{625}+625\times\frac{24}{625}=4536$.

………12 分

18. 解（Ⅰ）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$CD\perp$ 平面 BCC_1B_1

∴$CD\perp BE$， ………3 分



又∵E 为线段 CC_1 的中点，由已知易得 $Rt\Delta B_1BC \backsim Rt\Delta BCE$

$\therefore \angle EBC = \angle BB_1C$，

$\therefore \angle EBB_1 + \angle BB_1C = 90^\circ$，

故 $BE\perp B_1C$，

且 $B_1C \cap CD = C$

∴$BE\perp$ 平面 B_1CD，

又 $BE \subset$ 平面 A_1BE

∴平面 $A_1BE\perp$ 平面 B_1CD. ………6 分

（Ⅱ）以 D 为坐标原点，建立空间直角坐标系，设 $AB=a$

则 $A_1(\sqrt{2},0,2)$、$B(\sqrt{2},a,0)$、$E(0,a,1)$

$\therefore \overrightarrow{A_1B}=(0,a,-2)$、$\overrightarrow{A_1E}=(-\sqrt{2},a,-1)$

设平面 A_1BE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases} ay-2z=0 \\ -\sqrt{2}x+ay-z=0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} z=\dfrac{a}{2}y \\ x=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}y \end{cases}$ 不妨令 $y=1$

$\therefore \vec{n}=(\dfrac{a}{2\sqrt{2}},1,\dfrac{a}{2})$，又底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\left|\dfrac{a}{2}\right|}{\sqrt{1+\dfrac{3}{8}a^2}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{3}{2}}}$$

又 $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}<a<2\sqrt{2}$，$\therefore \dfrac{8}{5}<a^2<8$，$\therefore \sqrt{2}<\sqrt{\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{3}{2}}<2$

$\therefore \frac{1}{2} < \cos\theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$，$\therefore \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}$. ………12 分

19. 解（Ⅰ）由 $f(x) = e^{1-x}(2ax - a^2)$

得 $f'(x) = e^{1-x}(2ax - a^2) + 2ae^{1-x} = -e^{1-x}(2ax - a^2 - 2a) = 0$，又 $a \neq 0$，故 $x = 1 + \frac{a}{2}$，

当 $a > 0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty, 1 + \frac{a}{2}\right)$ 上为增函数，在 $\left(1 + \frac{a}{2}, +\infty\right)$ 上为减函数，

$\therefore 1 + \frac{a}{2} \leq 2$，即 $a \leq 2$

$\therefore 0 < a \leqslant 2$

当 $a < 0$ 时，不合题意

故 a 的取值范围为 $(0,2]$. ………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，当 $a > 0$ 时 $f(x)_{\max} = f(1 + \frac{a}{2}) = 2a \cdot e^{-\frac{a}{2}}$

即 $g(a) = 2a \cdot e^{-\frac{a}{2}}$

则 $g'(a) = (2 - a)e^{-\frac{a}{2}} = 0$，得 $a = 2$

$\therefore g(a)$ 在 $(0,2)$ 上为增函数，在 $(2,+\infty)$ 上为减函数，

$\therefore g(a)_{\max} = g(2) = \frac{4}{e}$. ………13 分

20. 解（Ⅰ）$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. ………6 分

（Ⅱ）由题意知，当 $k_1 = 0$ 时，M 点的纵坐标为 0，直线 MN 与 y 轴垂直，则 N 点的纵坐标为 0，

故 $k_2 = k_1 = 0$，这与 $k_2 \neq k_1$ 矛盾.

当 $k_1 \neq 0$ 时，直线 PM：$y = k_1(x+2)$，

由 $\begin{cases} y = k_1(x+2) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$，得 $(\frac{1}{k_1^2} + 4)y^2 - \frac{4}{k_1^2}y = 0$，$\therefore y_M = \frac{4k_1}{1 + 4k_1^2}$

$\therefore M(\frac{2-8k_1^2}{1+4k_1^2},\frac{4k_1}{1+4k_1^2})$，同理 $N(\frac{2-8k_2^2}{1+4k_2^2},\frac{4k_2}{1+4k_2^2})$

由直线 MN 与 y 轴垂直，则 $\frac{4k_1}{1+4k_1^2}=\frac{4k_2}{1+4k_2^2}$

$\therefore 4k_1k_2^2-4k_2k_1^2+k_1-k_2=0\Rightarrow(k_2-k_1)(4k_1k_2-1)=0$

$\because k_1\neq k_2$，$\therefore 4k_1\cdot k_2=1$

即 $k_1\cdot k_2=\frac{1}{4}$ ………13 分

21. 解（Ⅰ）$f_n'(x)=-\frac{n}{x^2}$，设切点 $(x_0,\frac{n}{x_0})$，

$\therefore$ 切线方程为：$y-\frac{n}{x_0}=-\frac{n}{x_0^2}(x-x_0)$，

令 $x=0$，得 $y=\frac{2n}{x_0}$，令 $y=0$，得 $x=2x_0$，

$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{2n}{x_0}\right|\cdot\left|2x_0\right|=2n$，即 $a_n=2n$. ………6 分

（Ⅱ）证明：(1)先证 $T_n^2<\frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{3}+\cdots+\frac{T_{n-1}}{n}+\frac{1}{2}$

$\because T_n^2=(T_{n-1}+\frac{1}{2n})^2\Rightarrow T_n^2-T_{n-1}^2=\frac{T_{n-1}}{n}+\frac{1}{4n^2}(n\in N^*,n\geqslant 2)$

$\therefore T_n^2-T_{n-1}^2=\frac{T_{n-1}}{n}+\frac{1}{4n^2}<\frac{T_{n-1}}{n}+\frac{1}{4n(n-1)}$，$(n\in N^*,n\geqslant 2)$

$\therefore T_n^2-T_1^2<\frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{3}+\cdots+\frac{T_{n-1}}{n}+\frac{1}{4}(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)})$

$\therefore T_n^2<\frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{3}+\cdots+\frac{T_{n-1}}{n}+\frac{1}{4}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{4}=\frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{3}+\cdots+\frac{T_{n-1}}{n}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}$

$\therefore T_n^2<\frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{3}+\cdots+\frac{T_{n-1}}{n}+\frac{1}{2}$ ………9 分

(2)再证 $\frac{T_2}{2}+\frac{T_3}{3}+\cdots+\frac{T_n}{n}<T_n^2$

因为 $n\geqslant 2$，由 $T_n=T_{n-1}+\frac{1}{2n}$，得到

$\because T_n^2-T_{n-1}^2=\frac{T_{n-1}}{n}+\frac{1}{4n^2}$，且 $\frac{T_n}{n}=\frac{T_{n-1}}{n}+\frac{1}{2n^2}$，

$\therefore \frac{T_n}{n}=\frac{T_{n-1}}{n}+\frac{1}{2n^2}=T_n^2-T_{n-1}^2-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{2n^2}=T_n^2-T_{n-1}^2+\frac{1}{4n^2}$，

$\therefore \frac{T_2}{2}+\frac{T_3}{3}+\cdots+\frac{T_n}{n}=T_n^2-T_1^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$

$=T_n^2+\frac{1}{4}\left(-1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$

由(1)证明可知 $\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)<1-\frac{1}{n}<1$ ，

$\therefore$ 当 $n\in N^*$ 且 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{T_2}{2}+\frac{T_3}{3}+\cdots+\frac{T_n}{n}<T_n^2+\frac{1}{4}(-1+1)=T_n^2$

综合(1)(2)得，当 $n\in N^*$ 且 $n\geqslant 2$ 时，

有 $\frac{T_2}{2}+\frac{T_3}{3}+\cdots+\frac{T_n}{n}<T_n^2<\frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{3}+\cdots+\frac{T_{n-1}}{n}+\frac{1}{2}$ ………13 分